Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\left\{n\in\mathbb{N} \mid n^2<7+\sqrt{7}\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției f are ordonata strict mai mare decât 0.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 2 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a paralelei prin A la OB cu paralela prin B la OA.

5p **6.** Arătați că $\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}x}=1$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & 2a & 0\\ -a & 1+2a & 0\\ 0 & 0 & 1+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $3*4=5$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*\sqrt{5}<x+1$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_{-1}^1 \left\| x\ln\left(f(x)\right)\right\| dx = 2\ln 2 - 1$.