

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2$ este întreg.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x^2 + 2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+4x+2} = 64 \cdot 2^x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $MNPQ$ cu $M(2,3)$, $N(5,4)$ și $P(4,0)$. Determinați ecuația dreptei MQ .
- 5p 6. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1,0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că, dacă $a \in (-\infty, 0)$ și $b \in (0, +\infty)$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1,3) \cdot X = A(2,1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Calculați $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = e(e-1)$.

5p b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$.